

## OLASILIK PROBLEMLER

1. Aynı uzunluğa sahip  $2n$  tane ip bir demet halinde tutulmaktadır. Önce demetin bir tarafındaki uçlar rastgele seçilerek ikiye ikiye bağlanıyor. Daha sonra diğer taraftaki uçlar aynı şekilde bağlanıyor. İpler serbest bırakıldığında tek bir ilmek oluşmuş olması olasılığını hesaplayınız.
2. Bir stadyumda bulunan  $n$  kişiden her biri, bir kağıda  $\{1,2, \dots, k\}$  kümesinden seçtiği gelişigüzel bir sayı yazıyor. Yazılan sayılardan herhangi ikisinin aynı olmama olasılığını hesaplayınız.
3. İki arkadaş 1 den 100 e kadar tam sayılarla numaralanmış kartlardan oluşan birer desteyi iyice karıştırıp aynı anda kendi destelerinden çektikleri kartı açarlar. Tüm kartlar tükenene kadar veya herhangi bir anda ikisi de aynı sayıyı çekmişse oyun biter. Tüm kartların çakışma olmadan çekilmiş olması olasılığını hesaplayınız.
4. Bir madeni para  $n$  kez atıldığında ard arda iki kez yazı gelmeme olasılığını hesaplayınız.
5. Bir yayınevi işletmecisi, yeni basılan bir kitaptaki hataların bulunup düzeltilmesi için iki musahhah (düzeltmen) ile bir anlaşma yapar. Şöyle ki, işletmeci kitaptaki hataların düzeltilmesi için 2000 TL bütçe ayırmıştır. Musahhahlar kitabı birbirlerinden bağımsız olarak inceleyecek ve bulunan toplam hata sayısı dikkate alınarak her birine bu toplama olan katkıları oranında ödeme yapılacaktır. Bir süre sonra musahhahlar işlerini tamamladıklarında,  $A$  nın 85;  $B$  nin de 63 hata bulmuştur. Ortak bulunan hataların sayısı da 35 dir. Ödemenin nasıl yapılacağını belirleyiniz.
6. Alaska'da, toprağın donup katılaşması nedeniyle kış mevsimi boyunca çukur açmak imkânsız hale gelmektedir. Bu nedenle, Alaska'da yaşayanlar kış mevsimlerinde ölenlerin gömülebilmesi için yeterli sayıda mezar çukurunu henüz soğuklar başlamadan hazırlamak zorundadır. 6237 nüfusa sahip bir kasabanın belediye başkanının, yanılma payı %10 u geçmemek koşuluyla, kış mevsimi boyunca her bireyin ölme olasılığını 0,018 kabul ederek kaç mezar çukuru hazırlatması gerektiğini hesap ediniz.
7. Bir örümcek günde 3 sinek yediği zaman doymaktadır. Bu örümceğin ağına takılan bir sinek, yeterince zaman bulabilirse kurtulabilmekte ancak, örümcek kendisini yakalamak üzere harekete geçtiyse  $\frac{2}{5}$  olasılıkla kaçabilmektedir. Aynı gün içinde ağa takılan altıncı sineğin kurtulma olasılığını hesaplayınız.
8. Almanya'da oynanan Lotto isimli şans oyununda her çekilişte  $\{1,2, \dots, 49\}$  kümesinden 6 farklı tam sayı seçilmekte ve oyuna katılanlar, tahminlerinin doğruluğu ile orantılı olarak ikramiye kazanmaktadır. Bu oyunun 20 Aralık 1986 ve 21 Temmuz 1995 tarihli günlerde yapılan çekilişlerinin ikisinde de 15 25 27 30 42 48 kombinasyonu kazanan numaralar olarak çekilmiştir. Piyango idaresi, oyunun başlatıldığından o güne kadar düzenlenen 3016 çekilişte ilk kez öyle bir durumun ortaya çıktığını bildirmiştir. Ortaya çıkan bu durumun ne ölçüde sürpriz bir durum olduğunu belirleyiniz.
9. İki kişi arasında oynanan Rus ruletinde iki kişi bir toplu tabancaya tek bir mermi yerleştirir. Sırası gelen, topu çevirip merminin konumunu belirsiz hale getirdikten sonra şakağına dayadığı tabancayı ateşler. Oyunda ilk sırada mı ikinci sırada mı yer almanın avantajlı olduğunu belirleyiniz.
10. İki silahşör birbirlerine sıra ile ateş ettikleri bir düello yapmaya karar verirler. İlk sırayı kullananın, her ateş ettiğinde hedefine isabet kaydetme olasılığı  $p$  dir. Düelloda her iki tarafın hayatta kalmalarının eşit olasılık değerlerine sahip olabilmesi için, ikinci sıradaki silahşörün her ateş edişindeki isabet olasılığını hesaplayınız.

11. Bir konuda ihtilafa düşen üç silahşör aralarındaki sorunu çözümlmek için *triello*<sup>1</sup> yapmaya karar verirler. Şöyle ki, üçü de eşkenar bir üçgenin köşelerine yerleşecekler ve sırası gelen, dilediği hedefe nişan alıp ateş edecektir. Birisi ateş ettikten sonra sıra ikinciye, sonra üçüncüye, tekrar birinciye geçecek ve bu şekilde devam edecektir. Arada ölen olduğunda, tabii olarak zincirde yer almayacaktır. Triello, katılanlardan ikisi ölüncüye kadar sürdürülecektir. Her biri hayatta kalabilmek için, sıra kendine geldiğinde en iyi stratejiyi belirleyebilecek muhakeme kabiliyetine sahiptir. Trielloya katılanlardan *C*, bir hedef nişan aldığı anda muhakkak isabet kaydetmektedir. *A* ve *B* nin başarı olasılıkları ise sırasıyla %50 ve % 80 dir. Bu olasılıklar göz önünde bulundurularak ateş etme sırası önce *A*, sonra *B* ve sonra *C* olarak belirlenmiştir. İlk ateş eden *A* nın kimi hedef tutacağını belirleyiniz. Ayrıca, her oyuncunun hayatta kalma olasılığını belirleyiniz.
12. Gerçek sayı ekseninde yaşayan bir pire tam sayı koordinatlı noktalar üzerinde sıçrama egzersizleri yapmaktadır.  $n$  koordinatlı noktadan yaptığı sıçrayış, eşit olasılıklarla  $n + 1$  veya  $n - 1$  noktasında son bulmaktadır. Orijinden harekete başlayan pirenin tekrar orijine dönme olasılığını hesaplayınız.
13. Gerçek sayı ekseninin orijin noktasında duran bir pire, eşit olasılıklarla 1 veya 2 birim (pozitif yönde) sıçramakta ve bundan sonra da aynı şekilde hareketine devam etmektedir. Bu pirenin 50 koordinatlı noktayı ziyaret etme olasılığını hesaplayınız.
14. Yukarıdaki pirenin 60 koordinatlı noktayı ziyaret ettiği bilindiğine göre, 50 koordinatlı noktayı ziyaret etmiş olması olasılığını hesaplayınız.
15. Bir çiftlikte 6237 sağlıklı tavuk ve bunlardan ayrı bir bölmede tutulan 231 hastalıklı tavuk bulunmaktadır. Bir gece yanlışlıkla hastalıklı tavukları sağlıklı olanlardan ayıran kapı açık unutulmuş ve tavuklar bir araya gelip karışmışlardır. Hastalıklı tavukları dış görünüşleri itibarı ile diğerlerinden ayırmak mümkün değildir. Hastalığı belirlemek üzere geliştirilen bir test, hastalıklı bir tavuğa uygulandığında %90 olasılıkla (+) sonuç vermektedir. Fakat test, sağlıklı tavuklarda da %1 olasılıkla (+) sonuç vermektedir. Test uygulandığında (+) sonuç veren bir tavuğun sağlıklı olma olasılığını hesaplayınız.
16. Bir torbada iki tane siyah top ile sayısı bilinmeyen beyaz toplar bulunmaktadır. Torbaya rengi farkedilmeden, siyah veya beyaz olma olasılıkları eşit olan, bir top atılıyor ve daha sonra torbadan rasgele bir top seçiliyor. Seçilen top siyah olduğuna göre torbaya atılan topun siyah olma olasılığını hesaplayınız.
17.  $A$ ,  $n$  elemanlı bir küme olmak üzere tüm  $(X, Y)$  sıralı ikilileri için  $X \cap Y$  kesişiminde yer alan elemanların sayılarının toplamını  $(\sum_{X, Y \subset A} n(X \cap Y))$  bulunuz.
18. Elemanları  $\{1, 2, \dots, m\}$  kümesinden seçilen  $n$  terimli bir  $\{a_n\}$  dizisinde ardışık terimlerden oluşan (maksimal) sabit alt dizilere öbek adını verelim. Örneğin 1123344443432211 dizisini öbeklere ayırarak yazarsak 11 2 33 4444 3 4 3 22 11, dizide 9 öbek bulunduğu anlaşılır. Öbeklerin sayısının ortalama değerini hesaplayınız.
19.  $\{1, 2, \dots, n\}$  kümesinin, tam  $k$  tane sabit noktası bulunan permütasyonlarının sayısı  $p_k(n)$  ile gösterilmek üzere,  $\sum_{k=0}^n k p_k(n)$  toplamını hesaplayınız.
20. Her birinin üzerine, diğerlerinden farklı olmak üzere,  $\{1, 2, \dots, n\}$  tam sayılarından biri yazılan  $n$  top bir torbaya konulmuştur.  $m$  öğrenci sırayla bu torbadan bir top çeker ve topun üzerinde yazılı sayıyı kaydedip topu torbaya iade eder. Kaydettiği sayı, kendisinden öncekilerin kaydettiği sayıların en büyüğünden daha küçük olmayan her öğrenciye rekortmen deniliyor. Rekortmenlerin beklenen sayısını belirleyiniz.
21. Birbirine eş 27 beyaz küpten tek bir küp oluşturuluyor ve oluşturulan küpün dış yüzeyi siyaha boyanıyor. Daha sonra bu küp tekrar parçalara ayrılıyor ve küpler bir torbada

<sup>1</sup> İki kişi arasında yapılan düellonun üç kişiye genelleştirilmesi.

karıştırıldıktan sonra torbadan rastgele seçilerek tekrar tek bir küp oluşturuluyor. Oluşturulan bu küpün dış yüzeyinin tamamen siyah olma olasılığı kaçtır?

22. 4 kırmızı, 8 mavi bilye bir halka şeklinde rasgele diziliyor. 2 kırmızı bilyenin yan yana gelmeme ihtimali nedir?
23. Güneş'in, Ateş'ten bir fazla madeni parası vardır. Her ikisi de bütün paralarını aynı anda fırlatıyorlar ve ortaya çıkan tura sayısını gözlüyorlar. Paraların her iki yüzünün de gelme ihtimali eşit olduğuna göre, Güneş'in Ateş'ten daha fazla tura elde etme olasılığı nedir?
24. Ateş ile Güneş bir çift zar atarak üst yüzlerinde gelen sayıların toplamına dayanan bir oyun oynamaktadırlar. Ateş'in kazanması için sayıların toplamının 12 olması ve Güneş'in kazanması için sayıların toplamının iki sefer üst üste 7 olması gerekmektedir. Oyun biri kazanana kadar devam edeceğine göre, Ateş'in oyunu kazanma olasılığı nedir?
25. Bir sinema gişesinde bilet alanların doğum günleri kaydedilmekte ve daha önce bilet almış herhangi bir müşteriyle aynı günde doğmuş olan sıradaki ilk kişiye, bir defaya mahsus bedava bilet verilmektedir. Bilet gişesinin önünde duran Ateş, istediği zaman kuyruğa girebilmektedir (örneğin kuyruğa birinci sırada girebilir ya da ellinci sırada girebilir).
26.  $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$ ,  $|AB| = 2005$ ,  $|AC| = 2006$  olacak şekilde bir  $ABC$  üçgeni verilmiş olsun. Ateş ve Güneş sırayla kendilerine kalan üçgeni bir doğru boyunca, her birinin alanı 1 veya daha büyük iki yeni üçgen oluşturacak şekilde kesiyorlar ve bu üçgenlerden geniş açılı olanı (ikisi de dik açılı ise herhangi birini) atılıp geriye kalan üçgenle oyuna devam ediyorlar. Bu kesme işlemini yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyuna Ateş'in başladığını ve her iki oyuncunun da mümkün olan en iyi hamleleri yapacağını kabul ederek oyunu kimin kazanacağını belirleyiniz.
27. Bir zar  $n$  kere atıldıktan sonra zarın üzerindeki bütün sayıların en az bir kere gelmiş olma olasılığına  $q$  diyelim.  $q > \frac{1}{2}$  olmasını sağlayan en küçük  $n$  tam sayısı nedir? (Çözüm için hesap makinesine ihtiyaç duyabilirsiniz.)
28. Dalgın bir profesör iki adet kibrit kutusu alıyor ve birisini sağ, diğerini de sol cebine atıyor. Kibrite ihtiyacı olduğu herhangi bir zaman elini rastgele bir seçimle sağ veya sol cebine atıyor ve bu cepteki kutuyu alıyor. Bir gün profesör, daha önce kutudaki son kibriti aldıktan sonra dalgınlıkla kutuyu tekrar cebine atmış olacak ki, eline aldığı kibrit kutusunun boş olduğunu görüyor. Eğer iki kutuda da başlangıçta  $n$  tane kibrit çöpü varsa, son durumda diğer kutuda  $k$  tane kibrit çöpü olma olasılığı nedir? ( $0 \leq k \leq n$ )