

ÇEKMECE PRENSİBİ

PROBLEMLER

1. 'Bir ormandaki ağaçların sayısı, o ormanda en çok yaprağa sahip ağacın yaprak sayısından daha büyük ise, o ormanda aynı yaprak sayısına sahip en az iki ağaç vardır' önermesinin hangi kabûl altında doğru olduğunu belirleyiniz.
2. Karanlık bir odadaki çekmecede 10 çift kahverengi ve 10 çift siyah çorap bulunmaktadır. Aydınlık ortama çıkıldığında giyilebilecek aynı renkte bir çift çorap almış olmayı garanti edebilmek için, renkleri seçilmeden en az kaç çorap alınması gerektiğini bulunuz.
3. Bir topluluk 10 Alman, 12 Bulgar, 9 Japon, 7 Rus ve 4 İtalyan matematikçiden oluşmaktadır. Rastgele seçilecek bir grupta aynı ülkeden seçilen en az iki matematikçi olması isteniyor. Grup büyüklüğünün en az kaç kişi olabileceğini belirleyiniz.
4. Bir topluluk 10 Alman, 12 Bulgar, 9 Japon, 7 Rus ve 4 İtalyan matematikçiden oluşmaktadır. Rastgele seçilecek bir grupta her ülkeden en az bir matematikçi olması isteniyor. Grup büyüklüğünün en az kaç kişi olabileceğini belirleyiniz.
5. Birim karenin¹ içinde beş tane böcek dolaşmaktadır. Her an, aralarındaki mesafe 0,72 den daha küçük olan iki böcek bulunabileceğini gösteriniz.
6. Birim karenin içinden seçilen herhangi 51 nokta arasından, yarıçapı 1/7 olan bir çemberin içine hapsedilebilecek en az üç nokta bulunabileceğini gösteriniz.
7. Kenar uzunluğu 5 olan bir eşkenar üçgenin içinde 10 tane böcek dolaşmaktadır. Her an, aralarındaki mesafe 1,7 den daha küçük olan iki böcek bulunabileceğini gösteriniz.
8. Eni 22 m, boyu 27 m ve derinliği 2 m olan bir havuzda 300 balık bulunmaktadır. Her an, aralarındaki mesafe 3 m yi aşmayan en az iki balık bulunabileceğini gösteriniz.
9. Birim karenin içinde 11 nokta nasıl verilirse verilsin, aralarından üç tanesinin, alanı 1/20 yi aşmayan bir üçgenin içine sığdırılabileceğini gösteriniz.
10. Birim kürenin üstünde 5 tane böcek dolaşmaktadır . Her an bu böceklerden en az dört tanesini hapsedebilecek bir kapalı birim yarım küre² bulunacağını gösteriniz.
11. Bir köyde yaşayan 123 kişinin yaşları toplamı 3813 tür. Yaşlarının toplamı 3100 den az olmayan olan 100 kişi bulunabileceğini gösteriniz.

¹ Birim kare: Kenar uzunluğu 1 olan kare.

² Bir yarım kürenin sınırı, bu yarım küreyi diğer yarım küreden ayıran büyük çember (yarıçapı kürenin yarıçapına eşit olan çember) olarak tanımlıdır. Yarımküre ile sınırının birleşimi de kapalı yarım küre olarak adlandırılır.

12. Bir test sınavında her soruya öğrencilerin yarısından fazlası doğru yanıt vermiştir. En az bir öğrencinin soruların yarısından fazlasını doğru yanıtladığını gösteriniz.
13. Bir fabrikada görevli 5 gece bekçisi bulunmaktadır. Her bekçi haftada üç gece nöbetçi olduğuna göre en az üç bekçinin görevli bulunduğu bir gecenin olduğunu gösteriniz.
14. Bir toplantıya katılan n kişi arasında, tanıştığı kişilerin sayısı eşit olan en az iki kişi olduğunu gösteriniz.
15. 200 fındık 20 çocuk arasında, her çocuk en az bir fındık almak koşulu ile paylaştırılmıştır. Çocuklardan en az iki tanesinin eşit sayıda fındık aldığını gösteriniz.
16. Her biri 25 ten büyük olmayan 7 tam sayıdan oluşan bir kümenin tüm alt kümelerinde bulunan elemanların toplamları listelenmiştir. Bu listedeki sayılardan en az ikisinin eşit olacağını gösteriniz.
17. $\{1,2, \dots, 70\}$ kümesinde yer alan tam sayılardan 20 tanesi seçiliyor. Seçilen sayıların ikişer ikişer farkları (büyük sayıdan küçüğü çıkartılarak) hesaplanıp listeleniyor. Listedeki sayılardan en az bir tanesinin dört veya daha fazla sayıda tekrarladığını gösteriniz.
18. n elemanlı bir A kümesinin tüm alt kümelerinin yarısından daha fazlası seçiliyor. Seçilen alt kümelerden en az bir tanesinin bir başkasını kapsadığını gösteriniz.
19. Altı kişilik bir toplulukta herhangi iki kişi ya birbirlerine karşılıklı olarak sempati duymakta ya da birbirlerinden nefret etmektedir. Hepsi birbirinden nefret eden üç kişilik bir grup bulunmadığına göre hepsi birbirine sempati duyan üç kişilik bir grup bulunacağını gösteriniz.
20. $\{1,2, \dots, 2012\}$ kümesinin 1007 elemanlı her alt kümesinde, toplamları 2013 olan iki elemanın bulunacağını gösteriniz.
21. $\{1,2, \dots, 2012\}$ kümesinden 1007 eleman nasıl seçilmiş olursa olsun, seçilen sayılar arasında, biri diğerini bölen bir çift tam sayı bulunabileceğini gösteriniz.
22. On bir elemanlı bir kümenin dört elemanlı kümelerinden 10 tanesi rastgele seçilmiştir. Seçilen kümelerden ikisinin en az iki ortak elemanı bulunacağını gösteriniz.
23. $\{1,2, \dots, 100\}$ kümesinin, eleman sayısı 5 ten fazla olmayan 500 alt kümesi verilmiştir³. Bu kümeler arasından $\sigma(A) = \sigma(B)$ olacak şekilde⁴ $A \neq B$ kümeleri bulunacağını gösteriniz.
24. $\{1,2, \dots, 100\}$ kümesinin, eleman sayısı 3 ten fazla olmayan 600 alt kümesi verilmiştir⁵. Bu kümeler arasından $\sigma(A) = \sigma(B) = \sigma(C)$ olacak şekilde⁴ birbirinden farklı A, B, C kümeleri bulunacağını gösteriniz.

³ Verilen kümenin 5 ve daha az sayıda elemana sahip alt kümelerinin sayısı 79.375.496 dır.

⁴ $\sigma(X)$, X kümesinde yer alan sayıların toplamını göstermektedir.

⁵ Verilen kümenin 3 ve daha az sayıda elemana sahip alt kümelerinin sayısı 166.751 dir.

25. a_1, a_2, \dots, a_{15} pozitif tam sayılar ve b_1, b_2, \dots, b_{15} , aynı sayıların farklı bir permütasyonu olmak üzere

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdots (a_{15} - b_{15})$$

çarpımının bir çift sayı olduğunu gösteriniz.

26. a, b, c ve d birbirinden farklı tam sayılar olmak üzere,

$$(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$$

çarpımının 12 ile kalansız bölündüğünü gösteriniz.

27. Ardışık 39 tam sayı verilmiş olsun. Bunların arasından en az bir tanesinin rakamlarının⁶ toplamının 11 ile bölünebileceğini gösteriniz.
28. Fibonacci dizisinin⁷ terimlerinin son iki basamağı alınarak oluşturulan dizinin periyodik olduğunu gösteriniz.
29. Her n tam sayısı için, n terimden oluşan herhangi bir tam sayılar dizisinde ardışık terimlerden oluşan ve toplamları n ile bölünen bir alt dizi bulunabileceğini gösteriniz.
30. 2009 tam sayısının, son üç basamağı 001 olan bir kuvvetinin bulunduğunu gösteriniz.
31. 1453 sayısının, $2^n - 1$ sayısını bölmesini mümkün kılan bir n pozitif tam sayısı bulunabileceğini gösteriniz.
32. Ondalık gösterimi sadece 0 ve 1 rakamları kullanılarak yazılan tam sayıların en az bir tanesinin 1453 ile bölündüğünü gösteriniz.
33. Ondalık gösterimi sadece 1 rakamı kullanılarak yazılan tam sayıların en az bir tanesinin 1453 ile bölündüğünü gösteriniz.
34. Bir hastaya 30 günlük tedavi küründe her gün en az bir kez iğne (enjeksiyon) yapılmıştır. Kür boyunca toplam 45 kez iğne yapıldığına göre tam olarak 14 iğne yapılmış olan bir ardışık günler dizisi bulunacağını gösteriniz.
35. Katsayıları birer tam sayı olan bir $f(x)$ polinomu veriliyor. Üç farklı x_1, x_2, x_3 tam sayısı için $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 2$ ise, $f(a) = 3$ olacak şekilde bir a tam sayısı bulunamayacağını gösteriniz.
36. Birim karenin içinde yedi tane böcek dolaşmaktadır. Her an, aralarındaki mesafe 0,6 dan daha küçük olan iki böcek bulunabileceğini gösteriniz.
37. Bir çokyüzlünün en az iki yüzünün aynı sayıda kenara sahip çokgenler olduğunu gösteriniz.
38. Düzlemde herhangi 14 doğru verildiğinde, aralarındaki açının ölçüsü 14° den küçük olan iki doğru bulunacağını gösteriniz.

⁶ Problemin ifadesinde ve çözümde, bir tam sayının rakamlarının sayı değerlerinin toplamı kısaca rakamlarının toplamları olarak ifade edilmiştir.

⁷ Fibonacci dizisi, ilk iki terimi 1, 1 olan ve ikinci terimden itibaren, her terimi, kendinden önceki son iki terimin toplamına eşit olan dizidir.

39. Düzlemin her noktası iki renkten birine boyanıyor. Herhangi bir d uzunluğu verildiğinde, aynı renge sahip ve aralarındaki uzaklık d olan iki nokta bulunabileceğini gösteriniz.
40. Düzlemin her noktası üç renkten birine boyanıyor. Herhangi bir d uzunluğu verildiğinde, aynı renge sahip ve aralarındaki uzaklık d olan iki nokta bulunabileceğini gösteriniz.
41. Düzlemin her noktası iki renkten birine boyanıyor. Aynı renge sahip tüm noktalardan oluşan kümelerinden en az biri tanesi için, kümedeki noktaların arasındaki uzaklıkların tüm pozitif gerçel sayıları kapsayacağını gösteriniz.
42. Bir doğrunun her noktası iki renkten birine boyanıyor. Aynı renge sahip ve biri diğer ikisine eşit uzaklıkta olacak şekilde üç nokta bulunabileceğini gösteriniz.
43. Düzlemin her noktası iki renkten birine boyanıyor. Dört köşesi de aynı renge sahip bir dikdörtgen çizilebileceğini gösteriniz.
44. Alanı 400 ve çevre uzunluğu 100 olan herhangi bir dışbükey dörtgenin iç bölgesine, alanı 50 olan bir dairenin sığdırılabileceğini gösteriniz.
45. Rastgele verilen herhangi beş kafes noktasını⁸ ikişer ikişer birleştiren doğrulardan en az birinin orta noktasının da bir kafes noktası olacağını gösteriniz.
46. Köşeleri kafes noktaları⁹ olan dışbükey bir n –genin iç bölgesinde herhangi bir kafes noktası yoksa $n \leq 4$ olduğunu gösteriniz.
47. 160×300 boyutlarındaki bir dikdörtgenin iç bölgesine çemberler çizilmiştir. Çemberlerin çevre uzunlukları toplamı 2012 olduğuna göre, bu çemberlerden en az beş tanesini kesen bir doğru çizilebileceğini gösteriniz.
48. Bir yuvarlak masanın etrafında eşit aralıklarla yerleştirilmiş 15 sandalye bulunmaktadır. Sandalyelerin 8 tanesi kırmızı; 7 tanesi beyazdır. 8 kırmızı, 7 beyaz etiket renk uyumu gözetilmeden, sandalyelerin hizasında masaya diziliyor. Masayı, merkezi etrafında döndürerek en az 8 etiketin aynı renkte sandalye ile hizalanabileceğini gösteriniz.
49. Bir okuldaki birinci sınıf öğrencileri 7 şubeye bölünmüştür. Daha sonra bir şube daha açılmış ve aynı öğrenciler bu kez 8 şubeye bölünmüştür. İkinci dağıtımdan sonra en az bir öğrencinin, ilkinde göre daha tenha bir sınıfa düştüğünü gösteriniz.
50. 10 satranç oyuncusunun katıldığı bir yarışmada her oyuncu diğer oyuncuların her biriyle bir kez karşılaşmıştır. Her karşılaşma sonunda yenen +1 puan, yenilen -1 puan almış; berabere biten karşılaşmalarda iki tarafa da 0 puan verilmiştir. Yarışmada tüm maçların %70 den fazlasının beraberlikle tamamlandığı bilindiğine göre en az iki yarışmacının eşit toplam puanlara sahip olduğunu gösteriniz.

⁸ Bir dik Kartezyen koordinat sistemi ile verilen bir düzlemde, her iki koordinatları tamsayılar olan noktalar.