ÇÖZÜMLER (Week 9tr)

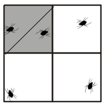
1. Ormandaki ağaçların sayısı n olsun. Ağaçların yaprak sayısı $\{0,1,\ldots,n-1\}$ kümesindeki değerlerden birisine eşit olacaktır. Bu kümede de n farklı değer olduğundan, ağaçların yaprak sayıları bir birinden farklı olabilir. Ancak, her ağacın en az bir yaprağı olduğu kabul edilirse, en az iki ağacın aynı sayıda yaprağa sahip olması kaçınılmaz olur.

2. Üç tane çorap alınırsa en az bir renkten iki veya üç çorap olması garanti edilmiş olur.

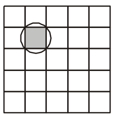
3. Beş ayrı ülke söz konusu olduğundan, herhangi altı kişiden en az ikisi aynı ülkeden olur. Dolayısı ile grup büyüklüğü en az 6 kişi olmalıdır.

4. 42 matematikçinin oluşturduğu bu topluluktan, İtalyan matematikçileri hariç tuttuğumuzda en fazla 38 kişilik bir grup oluşturabiliriz. 39 veya daha fazla sayıda kişiden oluşan her grupta, her ülkeden en az bir matematikçinin yer alması kaçınılmazdır.

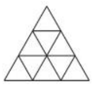
5. Kareyi $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ boyutlarında dört küçük karesel bölgeye ayırdığımızda bu bölgelerden en az birinde iki veya daha fazla böcek olması kaçınılmazdır. İki böceğin bulunduğu küçük karenin içindeki iki nokta arasındaki en büyük mesafe $\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}707\ldots < 0{,}72$ *olduğundan* istenilen sonuç elde edilmiş olur.



6. Birim kareyi, kenar uzunlukları $\frac{1}{5}$ olan 25 tane eş kareye bölelim. $51 > 2\cdot 25$ olduğundan, küçük karelerden en az bir tanesi 3 veya daha fazla nokta bulundurur. Bu kare, çapı $\frac{\sqrt{2}}{5}$ olan bir çemberle tamamen örtülebilir. Öte yandan, $\frac{\sqrt{2}}{5}\approx 0{,}283 < \frac{2}{7}$ olduğundan, bu karenin bulundurduğu üç nokta çapı 2/7 olan bir çemberin içine hapsedilebilir.

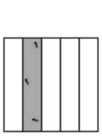


7. Üçgeni, kenarlarına paralel doğrular marifeti ile 9 eş eşkenar bölgeye ayıralım. Bu bölgelerden en az birinde 2 böcek bulunacaktır. Küçük eşkenar üçgenlerin kenar uzunluğu $\frac{5}{3} < 1{,}7$ olduğundan istenileni göstermiş oluruz.



8. Havuzu 297 tane $2\times 2\times 1$ boyutundaki dikdörtgenler pirizmasına bölersek bu prizmalardan en az bir tanesinde iki veya daha fazla balık bulunacaktır. Prizmanın herhangi iki noktası arasındaki mesafe en fazla 3 m olduğundan sonuç elde edilmiş olur.

9. Kareyi, kenarlarından birine paralel çizilen dört doğru marifeti ile beş eş dikdörtgensel bölgeye ayıralım. $11 > 2\cdot 5$ olduğundan, bu bölgelerin en az birinde üç veya daha fazla nokta bulunur ve dolayısı ile bu üç noktanın tanımladığı üçgen bir dikdörtgensel bölgeye sığar. Öte yandan, her dikdörtgensel bölgenin alanı 1/10 ve bunun içine sığan en büyük üçgenin alanı da 1/20 olduğundan istenilen sonuç elde edilmiş olur.



10. Böceklerin tümünün aynı büyük çember üstünde olmadığını kabul edebiliriz. Böceklerden herhangi ikisini alıp bunlardan geçen büyük çember çizilerek tanımlanan yarım kürelerden biri, geri kalan böceklerden en az ikisini ve sınırdakilerle birlikte toplam dört böceği içerir.

11. Köyde yaşayan en yaşlı 100 kişinin yaşları toplamının 3100 den küçük olduğunu kabul edersek, geri kalan 23 kişinin yaşları toplamının 713 ten büyük olması gerekir. Buradan, yaşları büyük olan 100 kişinin yaş ortalamasının 31 den küçük fakat, daha genç 23 kişinin yaş ortalamasının $\frac{713}{23} = 31$ den büyük olduğu çelişkisi elde edilir. O halde, en yaşlı 100 kişinin yaşları toplamı 3100 den büyük olmalıdır.

12. Sınavdaki soru sayısını n, sınıftaki öğrenci sayısını m ile gösterelim. Doğru yanıt verilen soruların toplam sayısı T olmak üzere, $T > n\frac{m}{2}$ olduğu verilmiştir. Her öğrencinin soruların yarısını veya daha azını doğru yanıtlamış olduğu kabul edilirse $T \le m\frac{n}{2}$ çelişkisi ortaya çıktığından bu kabul doğru değildir. O halde en az bir öğrenci soruların yarısından fazlasını doğru yanıtlamış olmalıdır.

13. Bekçiler tarafından bir hafta içinde tutlan nöbet sayısı $5\cdot 3 = 15$ ve $15 > 2\cdot 7$ olduğundan, görevli bekçilerin sayısı en az bir gece 2 den fazla olur.

14. Toplantıdaki her kişi için, tanıştığı kişilerin sayısı 0 ile $n-1$ arasında herhangi bir tam sayı olabilir. n kişiye dağıtabileceğimiz n değer bulunduğu için çekmece prensibini doğrudan kullanmamız mümkün değildir. Toplulukta herkes en az bir kişi ile tanışıyorsa, dağıtılabilecek sayılar 1 ile $n-1$ arasındaki sayılar olacağından n kişi arasından en az ikisinin aynı sayıda kişi ile tanıştığı anlaşılır. Topluluktaki diğer üyelerin herhangi birisi ile tanışıklığı olmayan bir tek kişi varsa,bu kişinin tanışıklık sayısı 0 olacaktır. Ancak böyle bir kişi var olduğunda geri kalanların tanışıklık sayısı en fazla $n-2$ olabilir. O halde, kimseyle tanışmayan kişiyi bir kenara bıraktığımızda, geriye $n-1$ kişi ve $n-2$ tanışıklık sayısı kalır ki, bu durumda da yine en az iki kişinin eşit sayıda kişi tanıyor olması kaçınılmazdır.

15. Çocukların aldığı fındık sayılarının farklı olduğunu kabul edelim. Fındık sayıları, küçükten büyüğe doğru sıralı olmak üzere $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ olsun. $a_2 \geq a_1 + 1, a_3 \geq a_1 + 2, \dots, a_{20} \geq a_1 + 19$ olduğundan, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} \geq a_1 + (a_1 + 1) + \cdots + (a_1 + 19) = 20a_1 + 190$ olur. Öte yandan, dağıtılan toplam fındık sayısı 200 olduğundan $200 \geq 20a_1 + 190$ yani $a_1 \leq \frac{1}{2}$ eşitsizliği elde edilir ki, bu da her çocuğun en az bir şeker almış olması ile çelişir. O halde fındık sayılarının an az iki tanesi eşit olmalıdır.

16. Eleman sayısı dört veya daha az olan alt kümelerle ilgilenmemiz yeterlidir. Listede bu tür alt kümelere karşı gelen en büyük sayı $25 + 24 + 23 + 22 = 94$ olabilir. Öte yandan eleman sayısı dördü aşmayan alt kümelerin sayısı $C(7,4) + C(7,3) + C(7,2) + C(7,1) + C(7,0) = 98$ dir. Listede 0 ile 94 arasında değerler alabilen 98 sayıdan en az ikisinin eşit olması kaçınılmazdır.

17. Seçilen tam sayılar $a_1 < a_2 < \cdots < a_{20}$ olsun. Ardışık sayılar arasındaki farkları

$$d_1 = a_2 - a_1, d_2 = a_3 - a_2, \dots, d_{19} = a_{20} - a_{19}$$

şeklinde tanımlayalım. Farkların en fazla üç kez tekrarladığını kabul edersek $d_1 + d_2 + \cdots + d_{19}$ toplamının alabileceği en küçük değer $3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + 7 = 70$ dir. Öte yandan, $d_1 + d_2 + \cdots + d_{19} = a_{20} - a_1 \leq 69$ olduğu açıktır. Bu çelişki, farklardan en az bir tanesinin dört veya daha fazla sayıda tekrarladığını gösterir.

18. Bir $x \in A$ elemanını içermeyen tüm alt kümeleri A_i $(i = 1, \dots, 2^{n-1})$ şeklinde sıralayıp ($A_i, A_i \cup \{x\}$) çiftlerini oluşturalım. Bu çiftlerde yer alan alt kümeler A kümesinin tüm alt kümeleri kapsar. Seçilen alt kümelerin sayısı, yukarıda tanımlanan çiftlerin sayısından büyük olduğundan en az bir çift, seçilen alt kümelerin ikisini de içerir ve göstermek istediğimiz sonuç elde edilmiş olur.

19. Problemi bir başka şekilde ifade edeceğiz. Altı kişiyi düzlemde dışbükey bir altıgenin köşesini oluşturan A, B, C, D, E, F noktaları ile temsil edelim. Her nokta çiftini, bu noktalara karşı gelen kişiler arasında sempati ilişkisi varsa yeşil, aksi takdirde kırmızı bir doğru parçası ile birleştirelim. Böylece her kenarı ve her köşegeni kırmızı veya yeşile boyanmış bir altıgen elde ederiz. Şimdi, köşeleri bu altıgenin üç köşesi olan ve üç kenarı da aynı renkle boyanmış bir üçgen bulunacağını göstermemiz yeterlidir.

A köşesini ele alalım. Bu köşeyi diğer beş köşeye birleştiren 5 doğru, iki farklı renge sahip olduğu için aynı renge sahip, diyelim ki kırmızı, üç doğru parçası bulabiliriz. Bu doğru parçalarının diğer uçları B, C, D olsun. BC, BD, CD doğru parçalarından tümü yeşil ise istenilen üçgen elde edilmiş olur. Bunlardan biri, sözgelimi BC, kırmızı ise, bu kez ABC üçgeninin tüm kenarları kırmızı olur ve aranan üçgeni bulmuş oluruz.

20. $\{1,2, \dots, 2012\}$ kümesinin elemanlarını aşağıdaki gibi 1006 çift halinde listeleyelim:

$$(1,2012), (2,2011), \dots, (1006,1007)$$

1007 elemanlı bir küme teşkil edildiğinde bu listedeki çiftlerin en az birindeki sayıların ikisinin de kümeye alınmış olması kaçınılmazdır. Her çiftte yer alan sayıların toplamı 2013 olduğundan, sonuç elde edilmiş olur.

[Not. Problemin genelleştirilmiş ifadesi şöyledir: m bir çift sayı ise: $\{1,2, \dots, m\}$ kümesinin $\frac{m+2}{2}$ elemanlı her alt kümesinde, toplamları $m + 1$ olan iki sayı yer alır. m bir tek sayı ise: $\{1,2, \dots, m\}$ kümesinin $\frac{m+3}{2}$ elemanlı her alt kümesinde, toplamları $m + 1$ olan iki sayı yer alır.]

21. Verilen kümeyi aşağıdaki gibi 1006 alt kümeye parçalayalım. Şöyle ki her alt küme, bir tek sayı ile bu sayıyı 2 nin kuvvetleri ile çarparak elde ettiğimiz sayılardan oluşsun:

$$\{1,2,4,8,16, \dots, 1024\},$$
$$\{3,6,12,24,48 \dots, 1536\},$$
$$\{5,10,20,40,80, \dots, 1280\},$$
$$\vdots$$
$$\{2011\}.$$

$\{1,2, \dots, 2012\}$ kümesinden 1007 eleman nasıl seçilirse seçilsin, en az ikisinin yukarıda listelenenler arasında aynı alt kümeye düşmesi kaçınılmazdır. Aynı alt kümeye düşen sayılardan küçük olanı, diğerini bölecektir.

22. Seçilen 10 alt kümenin her birinin 2 elemanlı alt kümelerini yazarak oluşturduğumuz listede $10 \cdot \mathrm{C}(4,2) = 60$ alt küme yer alır. Öte yandan, 11 elemanlı kümenin iki elemanlı alt kümelerinin sayısı $\mathrm{C}(11,2) = 55$ olduğundan, 60 alt kümeden oluşan listedeki alt kümelerin hepsinin bir diğerinden farklı olmayacağı anlaşılır. Bu durumda 2 elemanlı alt kümelerden en az bir tanesi seçilen alt kümelerden en az ikisinin alt kümesi olur.

23. Eleman sayısı 5 veya daha az olan her X alt kümesi için $0 \leq \sigma(X) \leq 490$ dır $[\sigma(\emptyset) = 0, \sigma(\{96,97,98,99,100\} = 490]$. Dolayısı ile altkümelerin elemanları toplamı 491 farklı değerden birine eşit olabilir. Verilen kümelerin sayısı 500> 490 olduğundan en az ikisinin elemanları toplamı eşit olmak zorundadır.

24. Eleman sayısı 3 veya daha az olan her X alt kümesi için $0 \leq \sigma(X) \leq 490$ dır $[\sigma(\emptyset) = 0, \sigma(\{98,99,100\} = 297]$. Dolayısı ile sözkonusu altkümelerin elemanlarının toplamı 298 farklı değerden birine eşit olabilir.Verilen kümelerin sayısı $600 > 2 \cdot 297$ olduğundan elemanları toplamı eşit olan en az üç küme bulunması mümkündür.

25. Verilen 15 pozitif tam sayı arasından hepsi tek veya hepsi çift olacak şekilde sekiz sayı bulunması mümkündür. Bu şekilde sekiz sayıyı seçip hem $\{a\} = a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ hem de $\{b\} = b_1, b_2, \ldots, b_{15}$ dizilerinde bu sayıları işaretleyelim.

Birinci kümede işaretli terimlerin sayısı 8; ikinci kümede işaretsiz terimlerin sayısı 7 olduğundan, en az bir işaretli bir terim diğer dizideki işaretli bir terim ile eşleşmiş olur. Bu işaretli terimlerin ikisi de tek veya ikisi de çift olduğundan farkları çift sayıdır. O halde, verilen çarpımdaki terimlerden en az birisi bir çift sayı, dolayısı ile çarpım da bir çift sayı olur.

26. Verilen dört sayıdan en az ikisi 3 ile bölündüğünde aynı kalanı verir. Bu iki sayının farkları da 3 ile bölünür. O halde problemde verilen çarpım da 3 ile bölünür.

Verilen sayıların ikisi tek sayı ikisi de çift sayı ise çarpımdaki farkların iki tanesi çift sayı olur ve çarpım 4 ile bölünür.

Verilen sayıların ikisi tek sayı ikisi de çift sayı değil ise, üç tane tek veya üç tane çift sayı bulunur ve bu üç sayının ikişerli farkları çift sayılar olur. Çarpımda yer alan farkların en az üç tanesi çift olacağından, çarpım 8 ile bölünür. Sonuç olarak, çarpım 3 ile ve 4 ile bölündüğünden, 12 ile bölünür.

27. Verilen sayıların ilk 20 si içinde onlar basamağı 9 dan farklı ve birler basamağı 0 olan en az bir tane bulunabilir. Bu özelliği taşıyan bir tam sayıyı N ile; rakamlarının toplamını da s ile gösterelim. $N, N+1, N+2, \ldots, N+19$ tam sayıları da verilen sayılar arasında olup rakamları toplamları $s, s+1, \ldots, s+10$ olur. Bu toplamlardan en az bir tanesinin 11 ile bölünebileceği aşikardır.

[Not. Aralarında herhangi birinin rakamları toplam 11 ile bölünmeyen ardışık 38 tam sayı bulunabilir. Örnek: 999981, 999982, ..., 1000018.]

28. Fibonacci dizisinin her teriminin son iki basamağı alınarak oluşturulan diziyi $\{b_n\}$ ile gösterelim. Bu dizinin ardışık iki terimleri ile oluşturulan sıralı çiftlerin en fazla $100^2 = 10.000$ farklı şekilde olabileceği açıktır. O halde, bu dizinin ilk 10.001 terimi yazıldığında en az iki farklı yerde aynı ardışık tam sayı çiftini bulabiliriz. Diyelim ki $b_m = b_k$ ve $b_{m+1} = b_{k+1}$ olsun $(m > k)$.

$$b_1, \ldots, \underbrace{b_m, b_{m+1}}, \ldots, \underbrace{b_k, b_{k+1}}, \ldots, b_{10001}$$

Buradan $b_{m+2} = b_m + b_{m+1} = b_k + b_{k+1} = b_{k+2}$ bulunur ki, bu şekilde sürdürerek $b_{m+3} = b_{k+3}, \ldots$ bağıntısını ve genel olarak, $m - k = p$ yazarsak, her $n \geq k$ tam sayısı için $b_{n+p} = b_n$ olduğunu elde ederiz. Bu ise $\{b_n\}$ dizisinin k inci terimden itibaren $p = m - k$ ile periyodik olduğunu gösterir.

Öte yandan

$$b_{k-1} = b_{k+1} - b_k = b_{m+1} - b_m = b_{m-1}$$

yazıp aynı şekilde devam ederek $b_{k-2} = b_{m-2}$, $b_{k-3} = b_{m-3}, \ldots, b_0 = b_{m-k}$ elde edilir. Buradan da $\{b_n\}$ dizisinin, ilk terimden başlayarak $m - k$ ile periyodik olduğu anlaşılır.

[Not 1. Dizinin periyodu 300 dür.]

[Not 2. Benzer şekilde hareket edilerek, her n pozitif tam sayısı için, Fibonacci dizisindeki terimlerin son n basamağı alınarak oluşturulan dizinin de periyodik olduğu gösterilebilir.]

29. Dizinin terimlerini $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ile ve ilk k terimin toplamını da b_k ile gösterelim. Herhangi bir $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $b_k \equiv 0 \pmod{n}$ ise, tanım gereği $a_1 + \cdots + a_k \equiv 0 \pmod{n}$ olur ve istenilen özellik gösterilmiş olur. Her $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $b_k \not\equiv 0 \pmod{n}$ olması durumunda $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sayılarını n moduna göre $n - 1$ eşdeğerlik sınıfına dağılacağından en az iki tanesi denk olacaktır. $i > j$ olmak üzere $b_i \equiv b_j \pmod{n}$ olduğunu kabul edersek, $b_i - b_j = a_i + a_{i-1} + \cdots + a_{j+1} \pmod{n}$ olur.

30. Herhangi bir tam sayı 1000 ile bölündüğünde kalan, 999 dan büyük olmayacağından, 1001 elemanı olan $\{2009^1, 2009^2, \ldots, 2009^{1001}\}$ kümesinde bulunan sayılardan en az ikisi 1000 ile bölündüğünde aynı kalanı verir. Bu sayıları 2009^a ve 2009^b ile gösterirsek, $a > b$ kabul ederek,

$$2009^a - 2009^b = 2009^b(2009^{a-b} - 1) \equiv 0 \pmod{1000}$$

yazabiliriz. Buradan, $1000 | 2009^b(2009^{a-b} - 1)$ elde edilir. 2009 ve 1000 tam sayılarının ortak böleni bulunmadığından $10000 | (2009^{a-b} - 1)$ olmalıdır. O halde $2009^{a-b} \equiv 1 \pmod{1000}$ olur ki, bu da 2009^{a-b} nin son üç basamağının 001 olmasını ifade eder.

[Not. 2009^{50} nin son üç basamağı 001 dir.]

31. $\{2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{1453}\}$ kümesindeki sayılardan en az ikisi, diyelim ki 2^i ve 2^j, 1453 ile bölündüğünde aynı kalanı verir. $i > j$ kabul edersek, $2^i - 2^j$ sayısı 1453 ile kalansız bölünür, yani $1453 | 2^i - 2^j = 2^j(2^{i-j} - 1)$ yazabiliriz. Öte yandan, $1453 \nmid 2^j$ olduğundan, $1453 | 2^{i-j} - 1$ sonucu elde edilir.

32. 1453 ile bölündüğünde $A = \{1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\cdots1}_{1454 \text{ tane}}\}$ kümesindeki tam sayılardan en az ikisi aynı kalanı verir ve bu sayıların farkı olan tam sayı 1453 ile bölünür. A kümesindeki elemanların farkı $\underbrace{11\cdots1}_{k}\underbrace{00\cdots0}_{t}$ şeklinde olduğundan aranan sayı bulunmuş olur.

33. Bir önceki problemde 1453 ile bölünen ve ondalık gösterimi $\underbrace{11\cdots1}_{k}\underbrace{00\cdots0}_{t}$ şeklinde olan bir sayının mevcudiyeti gösterilmişti. Buradan, 10 tam sayısının hiçbir kuvvetinin 1453 ile bölünmediğini göz önüne alarak, $1453|\underbrace{11\cdots1}_{k}$ elde ederiz.

[Not. Tüm basamakları 1 olan ve 1453 ile bölünebilen en küçük sayı 726 basamaklıdır.]

34. Hastaya t inci $(t = 1,2,\dots,30)$ günde yapılan iğne sayısını b_t ile; ilk t gün boyunca yapılan toplam iğne sayısını da a_t ile gösterelim $(a_t = b_1 + b_2 + \cdots + b_t)$. $a_1, a_2, \dots, a_{30}$ dizisindeki her terime 14 ilave ederek $a_1 + 14, a_2 + 14, \dots, a_{30} + 14$ dizisini oluşturalım. $a_{30} + 14 = 45 + 14 = 59$ olduğundan, bu iki dizideki terimler 1 ile 59 arasında değerler alabilir. Öte yandan iki dizide toplam olarak 60 terim bulunduğundan, dizileri oluşturan terimlerden en az iki tanesi eşit olmak zorundadır. Tanım gereği $a_1, a_2, \dots, a_{30}$ dizisi artan bir dizi olduğundan herhangi iki terimi aynı olamaz. Aynı şekilde $a_1 + 14, a_2 + 14, \dots, a_{30} + 14$ dizisi de artan bir dizi olduğundan herhangi iki terimi aynı olamaz. O halde, ilk dizideki terimlerden bir tanesi, diyelim ki a_t, diğer dizideki terimlerden birisine, sözgelimi $a_s + 14$ e eşit olacaktır. Bu durumda $a_t - a_s = 14$ yani

$$\begin{aligned} a_t - a_s &= (b_1 + \cdots + b_t) - (b_1 + \cdots + b_s) \\ &= b_{t+1} + \cdots + b_s = 14 \end{aligned}$$

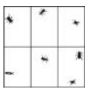
elde edilir ve $t + 1$ inciden s inci güne kadar tam 14 iğne yapıldığı anlaşılır.

35. Verilen polinom $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ olsun. $f(p) - f(q) = c_n(p^n - q^n) + \cdots + c_1(p - q)$ ve her k pozitif tam sayısı için $p - q | p^k - q^k$ olduğundan $(p - q) | f(p) - f(q)$ elde edilir. Bir a tam sayısı için $f(a) = 3$ ise,

$$a - x_1 | f(a) - f(x_1) = 1$$
$$a - x_2 | f(a) - f(x_2) = 1$$
$$a - x_3 | f(a) - f(x_3) = 1$$

yazabiliriz. 1 in sadece iki tane böleni olduğundan (1 ve -1), $a - x_1, a - x_2$ ve $a - x_3$ tam sayılarının hepsi birbirinden farklı olamaz. Bu durumda x_1, x_2 ve x_3 tam sayılarından en az ikisinin eşit olduğu çelişkisi doğar.

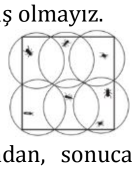
36. Birim kareyi $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ boyutlarında altı diktörtgene ayırdığımızda bu dikdörtgenlerden en az birinin içinde iki veya daha fazla böcek olması kaçınılmazdır.



Ancak, bu dikdörtgelerin köşegen uzunluğu

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{6} \approx 0{,}601\ldots > 0{,}6$$

olduğundan, istediğimiz sonuca ulaşmış olmayız. Öte yandan, birim kareyi yandaki şekilde gösterildiği gibi, çapı 5,98 olan dairelerin altısı ile kaplamak mümkündür. Bunlardan birinin içinde en az üç böcek bulunacağından, sonuca ulaşmış oluruz.



37. Bir çokyüzlünün tüm yüzleri arasında en fazla kenar sayısına sahip yüzün kenar sayısı n olsun. Bu yüze komşu olan n yüzün kenar sayıları 3 ile n arasında değerler alabileceğinden en az ikisinin aynı sayıda kenara sahip olması kaçınılmazdır.

38. Her doğruyu kendisine paralel kalacak şekilde ötelemek, verilen doğrular arasındaki açıları değiştirmez. Tüm doğruları paralel öteleme ile aynı noktadan geçecek şekilde taşıyalım. Verilen kümede paralel doğrular varsa aralarındaki açının ölçüsü 0° olacağından sonuç elde edilmiş olur. Herhangi iki doğrunun paralel olmadığını kabul ettiğimizde ise, tüm doğruların geçtiği noktada 28 açı tanımlanmış olur. Tüm açıların ölçülerinin 14° veya daha fazla olması durumunda açıların ölçüleri toplamı $28 \cdot 14° = 392° > 360°$ çelişkisini verir. Buradan da, açılardan en az bir tanesinin 14° den küçük olması gerektiği anlaşılır.

[Not. Çözüm genelleştirilerek, herhangi n doğru verildiğinde, aralarındaki açının ölçüsü π/n yi aşmayan en az iki doğru bulunacağı gösterilebilir.]

39. Kenar uzunluğu d olan herhangi bir eşkenar üçgen çizdiğimizde en az iki köşesi aynı renkte olacağından, istenilen noktalar elde edilmiş olur.

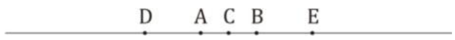
40. Düzlemde A, B, C, D, E, F, G noktalarını yandaki şekilde gösterilen düzende, ABG, AFE, BCG, DEF üçgenleri eşkenar ve $|AB| = |CD| = d$ olacak şekilde seçelim. A noktasının rengi kırmızı; kullanılan diğer iki renk beyaz ve sarı olsun.

B ve G noktalarının ikisinden biri kırmızı ise veya bu iki noktanın ikisi de beyaz veya ikisi de sarı ise, aralarındaki uzaklık d olan aynı renkte iki nokta bulmuş oluruz.

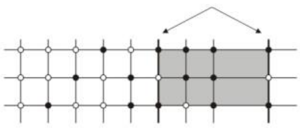
B ve G nin biri beyaz diğeri sarı olduğu durumda ise C noktası bu iki renkten birine sahipse problem çözülmüş olur. O halde C nin kırmızı olduğunu kabul etmemiz gerekir. Benzer şekilde, D noktasının da kırmızı olması gerekir. Bu durumda C, D çifti aradığımız noktalar olur.

41. Kullanılan renklerin kırmızı ve beyaz olduğunu kabul edelim. Kırmızı renkteki nokta çiftleri arasında k; beyaz nokta çiftleri arasında da b uzaklığının ölçülemediğini varsayalım. Genelliğe halel gelmeksizin $k \geq b$ kabul edebiliriz. Kırmızı noktalardan herhangi birini seçip A diye isimlendirelim ve ayrıca, $|AB| = |AC| = k$ ve $|BC| = b$ olacak şekilde B, C noktalarını seçelim. B ve C noktalarının her ikisi de beyaz ise, aralarındaki uzaklık b olan iki beyaz nokta bulmuş oluruz. Bu noktalardan en az biri kırmızı ise, aralarındaki uzaklık k olan iki kırmızı nokta bulmuş oluruz. Bu çelişki ya kırmızı ya da beyaz renkli noktaların oluşturduğu kümeden alınan çiftler arasında tüm uzaklıkların ölçülebileceğini gösterir.

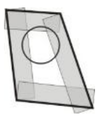
42. Doğru üzerinde aynı renge sahip, diyelim ki kırmızı A ve B noktalarını alalım. Bunların ortasındaki C noktası da kırmızı ise istenilen üç nokta elde edilmiş olur. C nin beyaz olduğunu kabul edelim. Şimdi D ve E noktalarını, doğru üzerinde A, B, C, D, E sıralamasıyla ve $|DA| = |AB| = |BC|$ olacak şekilde işaretleyelim. D ve E noktalarından biri kırmızı ise A ve B ile birlikte bu üç nokta aranan özelliği sağlar. D ve E nin her ikisi de beyaz ise bu kez C, D, E noktaları, aradığımız noktalar olur.



43. Düzlemde birbirine paralel üç doğru ile bunları dik kesen bir l doğrusu çizelim. l doğrusunun paralel doğrularla kesiştiği 3 nokta $2^3 = 8$ farklı şekilde renklendirilebilir. O halde l doğrusuna paralel 8 doğru daha çizersek, elde ettiğimiz 9 doğrudan en az iki tanesinin diğer doğrularla kesişim noktaları aynı renklendirmeye sahip olacaktır. Herhangi bir renklendirme için üç noktadan en az ikisi aynı renkte olacağından istenen dikdörtgen elde edilmiş olur.



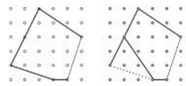
44. Dörtgenin her kenarı üzerine, o kenarı taban kabul eden ve yüksekliği 4 olan bir dikdörtgen çizelim. Bu dikdörtgenlerin alanları toplamı, verilen dörtgenin alanına eşit olur. Öte yandan bu dikdörtgenlerin ikişer ikişer kesişimleri boş olamayacağından birleşimleri de dörtgenin tüm iç bölgesini kaplayamaz. O halde, dörtgenin iç bölgesinde, dikdörtgenlerle örtülmemiş bir noktayı merkez kabul eden 4 yarıçaplı bir çember, dörtgenin içinde yer alır. Bu çemberin alanı $16\pi \approx 50{,}26$ olduğundan sonuç elde edilmiş olur.



[Problemin ifadesi, alanı S ve çevre uzunluğu P olan herhangi bir dışbükey dörtgenin iç bölgesine, yarıçapı S/P olan bir çemberin çizilebileceğinin gösterilmesi olarak genelleştirilebilir.]

45. Her noktanın koordinatları, tek veya çift tam sayı olma özelliğine göre, (tek,tek), (tek,çift), (çift,tek) veya (çift,çift) dağılımlarından birine sahip olur. O halde, verilen beş nokta arasında, aynı dağılıma sahip iki nokta vardır ve dolayısıyla, bu iki köşenin orta noktası da bir kafes noktasıdır.

46. Köşeleri kafes noktaları olan dışbükey bir beşgenin iç bölgesinde en az bir tane kafes noktası bulunacağını göstermek yeterlidir.
Beşgenin kenarları üstünde (köşeleri hariç) bir kafes noktası bulunmadığını kabul edebiliriz. Böyle bir nokta bulunması durumunda, bu noktayı köşelerden biri ile birleştirerek daha küçük bir beşgen elde edebiliriz. Gerekirse işlemi (sonlu sayıda) tekrarlayarak, kenarları üstünde kafes noktası bulunmayan bir beşgen elde edinceye kadar devam edebiliriz.



Bir önceki problemden, beşgenin köşelerini birleştiren doğru parçalarından (kenarları veya köşegenlerinden) en az birinin orta noktasının kafes noktası olduğunu biliyoruz. Kenarlar üzerinde kafes noktası bulunmadığı için bu orta nokta, bir köşegenin orta noktası olacağından, beşgenin iç bölgesinde yer alır.

47. Her çemberin bir kenara izdüşümü, uzunluğu çemberin çapına eşit olan bir doğru parçasıdır. Çemberlerin çevrelerinin toplamı 2012 ve çapları toplamı $T = \frac{2012}{\pi} > 640{,}4$ olur.
Kısa kenarlardan birisini ele alalım. Çemberlerin bu kenara izdüşümleri olan doğru parçalarının toplam uzunluğu T ve $T > 4 \cdot 160$ olduğundan, bu kenar üzerinde en az bir noktanın dörtten daha fazla doğru parçası tarafından kapsandığını görürüz. Bu noktadan uzun kenara paralel olarak çizilen doğru çemberlerden en az beş tanesini keser.

48. Masa, merkezi etrafında döndürüldüğünde, etiketlerle sandalyelerin 15 kez hizalanacağı açıktır. Her kırmızı etiketin bu 15 kez hizalanmanın tam 8 tanesinde kırmızı bir sandalye ile eşleşeceği açıktır. Aynı şekilde her beyaz etiket de tam 7 kez bir beyaz sandalye ile eşleşir. Dolayısı ile 15 hizalanma konumunda toplam $8 \cdot 8 + 7 \cdot 7 = 113$ eşleşme meydana gelir. Her bir konumda en fazla 7 eşleşme olması durumunda toplam eşleşme sayısı 105'i aşamayacağı için en az bir kez eşleşme sayısının 8 veya daha fazla olacağı anlaşılır.

49. Şubelerdeki öğrenci sayıları ilk bölünmede $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_7$; ikinci bölünmede $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_8$ olsun. $a_1 + a_2 + \cdots + a_7 > b_1 + b_2 + \cdots + b_7$ olduğu aşikardır. $a_1 + \cdots + a_k > b_1 + \cdots + b_k$ eşitsizliğinin sağlandığı en büyük indis değerini K kabul edelim. Bu durumda, ilk bölünmedeki en kalabalık ilk K şubenin öğrencileri, ikinci bölünmedeki en kalabalık ilk K şubeyi tam olarak dolduramazlar. $a_K > b_K$ olduğu göz önününde bulundurulursa en az bir öğrencinin daha tenha bir sınıfa düştüğü anlaşılır.

50. İkili karşılaşmaların sayısı $\binom{10}{2} = 45$ ve bunların en az %70 i yani 32 si beraberlikle sonuçlandığına göre, en fazla 13 karşılaşma bir tarafın galibiyeti ile sonuçlanmıştır. Yarışmacıların toplam puanlarının birbirinden farklı olduğunu kabul edelim. Bu durumda toplam 0 puan alan en fazla bir yarışmacı olur. Geri kalan 9 yarışmacının toplam puanları ya pozitif ya da negatif olacağından tümü negatif ya da tümü pozitif puan almış olan beş yarışmacı bulunur. Tümü pozitif ve birbirinden farklı puanlar alan beş yarışmacının puanları toplamı en az $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ olabilir. Bu durum, en az 15 karşılaşmada yarışmacılardan birine $+1$ puan verilmiş olması manâsını taşır ki, bu da en az 32 karşılaşmanın beraberlikle sonuçlanmış olmasıyla çelişir.